Didactiek met oneindig veel pingpongballen?

Koetsier, T.

published in
Nieuw archief voor de wiskunde
2012

Teun Koetsier
Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081
1081HV Amsterdam
t.koetsier@vu.nl

Onderwijs

Didactiek met oneindig veel pingpongballen?

In het juninummer van dit blad vertelt Eric Cornet over het onderzoek dat hij voor de Mastermath-cursus Didactiek had gedaan onder middelbare scholieren. Het beschreven pingpongballenvraagstuk riep mooie herinneringen op bij onze redacteur Teun Koetsier. In dit artikel beschrijft hij zijn bevindingen met dit interessante vraagstuk over oneindigheid.

In het juninummer van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* trof u een verslag aan van Eric Cornet met betrekking tot een interessant didactisch onderzoek dat hij had uitgevoerd samen met een medestudente, Rianne Maes [4]. Het ging om de rol die paradoxen van het oneindige kunnen spelen in het onderwijs en daarbij speelde een 'pingpongballenvraagstuk' (PPBV1) een rol.

Dat PPBV1 bestaat uit een gedachte-experiment en een daaropvolgende vraag: U heeft een ton en u heeft net zoveel ballen als er natuurlijke getallen zijn, genummerd, $1, 2, 3, \dots$, die zich aanvankelijk allemaal buiten de ton bevinden. Als het één minuut voor twaalf uur is doet u de eerste tien ballen in de ton en onmiddellijk daarna haalt u de bal met het laagste rangnummer er weer uit, dat is bal nummer 1. Dat moet u allemaal snel doen want een halve minuut voor twaalf uur doet u de volgende tien ballen, 11 tot en met 20, in de ton en weer haalt u de bal met het laagste rangnummer er uit, dat is nu bal nummer 2. En zo gaat u verder: op tijdstip $(1/2)^n$ minuut voor twaalf uur doet u de ballen $10n+1$ tot en met $10n+10$ in de ton en haalt u de bal met het laagste nummer er uit, dat is dan bal nummer $n+1$. De beschrijving wordt gevolgd door de vraag: "Hoeveel ballen zitten er om twaalf uur in de ton?" Waarde lezer, als u hierover nog nooit hebt nagedacht, dan zou u dat nu eigenlijk moeten doen.

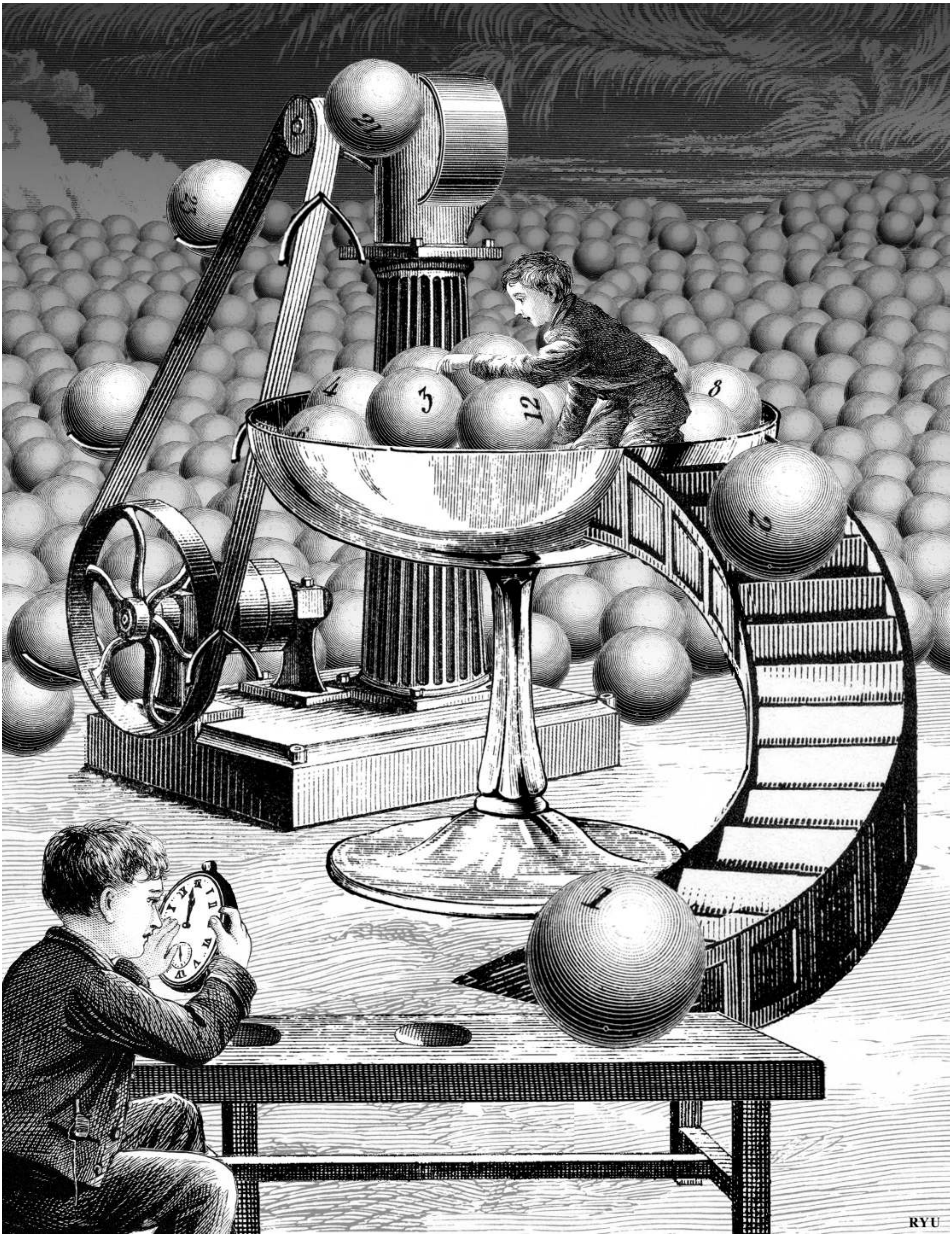
Het is heel goed mogelijk dat u dan op het antwoord komt dat we ook wel in de literatuur vinden. We noemen dat antwoord Oplossing 1: De vaas is leeg. Oplossing 1 vinden we bijvoorbeeld in een bekend leerboek waarschijnlijkheidsrekening van Ross, dat in de tachtiger jaren ook aan de VU werd gebruikt, en al eerder in een boekje van [6,9]. De redenering die tot dat antwoord leidt, luidt als volgt: alle ballen die ooit de ton in gaan, worden er ook weer uitgehaald. Je kunt voor elke bal uitrekenen wanneer hij erin gaat en vervolgens wanneer hij de bal met het laagste rangnummer is en dus weer wordt verwijderd. Dat gebeurt voor alle ballen vóór twaalf uur en dus is de ton leeg om twaalf uur.

Natuurlijk valt het niet te ontkennen dat er tijdens het experiment op alle actiemomenten voor twaalf uur telkens netto 9 ballen de ton ingaan en in de loop van het experiment neemt het aantal ballen in de ton dus onbegrensd toe. Binnen deze oplossing is dit een paradox van het oneindige: de ton is om 12.00 uur leeg en het feit dat daaraan voorafgaand het aantal ballen alsmaar groeit, is vreemd, maar niet meer dan één van die rare dingen die zich in het oneindige voordoen. Velen voelen zich helemaal op hun gemak met deze oplossing.

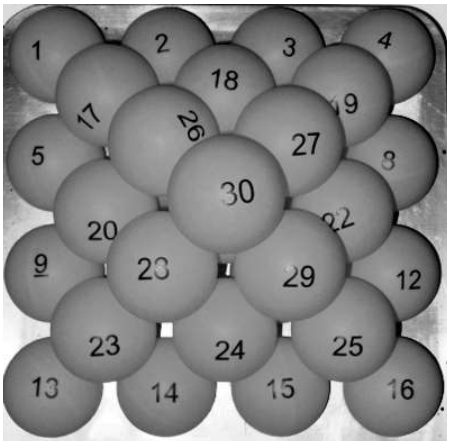
In de literatuur wordt de paradox in deze vorm wel de paradox van Littlewood–Ross genoemd.

Een tweede pingpongballenvraagstuk

Het PPBV1 riep mooie herinneringen bij mij op uit de tachtiger jaren toen Victor Allis bij ons aan de VU studeerde. Victor had grote moeite met de vanzelfsprekendheid waarmee Ross het antwoord op de vraag behandelde en hij bedacht de volgende zeer vernuftige variant op PPBV1, die ik PPBV2 zal noemen. De uitgangssituatie is dezelfde. Om één minuut voor twaalf worden de ballen 1 tot en met 9 in de ton gedaan en onmiddellijk daarna gebeuren twee dingen: bal nummer 1 in de ton wordt bal nummer 10 doordat er een 0 bij wordt gezet en bal nummer 10 buiten de ton wordt van zijn 0 ontdaan, wordt dus bal nummer 1. Om een halve minuut voor twaalf worden de ballen 11 tot en met 19 in de ton gedaan en weer gebeuren er onmiddellijk twee dingen: bal nummer 2 krijgt een extra 0 en wordt bal nummer 20 en de oude bal nummer 20 buiten de ton verliest zijn 0 en wordt bal nummer 2. Bij dit experiment worden telkens negen ballen de ton ingedaan, de bal in de ton met dan het laagste rangnummer krijgt er een 0 bij en de bal buiten de ton met als nummer het laagste tienvoud wordt van een nul ontdaan. Op deze manier wordt bij PPBV2 op elk moment waarop er met de ballen wordt gemanipuleerd in en buiten de ton precies dezelfde situatie gerealiseerd als bij PPBV1. En daarbij worden er alleen maar ballen in de ton gestopt en wordt er nooit een bal verwijderd.



Illustratie: Ryu Tajiri



Opmerkelijk is dat bij PPBV2 desondanks niemand de neiging heeft om de vraag naar de inhoud van de vaas om 12.00 uur te beantwoorden met: hij is leeg! In tegendeel, nu zeggen velen: de ton is vol met ballen en op al die ballen staat een natuurlijk getal met oneindig veel nullen.

Het wordt nog gekker

Victor en ik waren door dit alles zeer geïntrigeerd, maar we begrepen niet goed wat we aan het doen waren. Ik herinner mij nog goed dat wij ettelijke wiskundigen en informatici in de koffiekamer, bij printers en zelfs in toiletten met deze kwestie lastigvielen. Sommigen waren geamuseerd, anderen vonden dat we beter iets nuttigs konden doen, maar niemand sprak het voor ons verlossende woord. We bedachten ook nog PPBV3, een variant op PPBV2. Hierbij stellen we dat de ton genummerde plaatsen heeft, net zoveel als er natuurlijke getallen zijn. En bovendien eisen we dat een bal altijd op de plaats ligt die het nummer heeft dat op de bal staat. Wat is er natuurlijker? Het effect hiervan is echter spectaculair: hoewel het verschil tussen PPBV2 en PPBV3 onnozel overkomt, lijkt het er nu op dat om twaalf uur alle plaatsen in de ton onbezet zijn. De ton lijkt dus om twaalf uur leeg.

Als we bijvoorbeeld bal nummer 1 volgen in de loop van de tijd, dan zien we hoe vreemd dat is. Bal nummer 1 ligt eerst op plaats nummer 1, daarna krijgt die bal er een nul bij en wordt bal nummer 10 en ligt dus op plaats 10. De bal krijgt er oneindig vaak een nul bij en wordt daarbij telkens verplaatst. Ons gevoel zegt dat er om twaalf uur een 1 op deze bal staat gevolgd door oneindig veel nullen. Voor zo'n bal is er echter in de urn geen plaats.

Het simpele continuïteitsprincipe

Waar zijn we nou eigenlijk mee bezig? De gedachte-experimenten van PPBV1, 2 en 3 zijn wat men in de literatuur supertaken noemt. Een gewone taak bestaan uit een eindige rij goed gedefinieerde en achter elkaar uitvoerbare handelingen. Het effect van een gewone taak is de toestand na het uitvoeren van de laatste handeling. Een supertaak is een aftelbaar oneindige rij achter elkaar in een eindige tijd uitvoerbare handelingen. Omdat er geen laatste handeling is, is het effect dat de uitvoering van een supertaak op de wereld heeft niet meteen duidelijk.

Een belangrijk eerste punt om in de gaten te houden is het volgende. Allereerst veronderstellen we dat de handelingen waaruit de supertaak bestaat uitvoerbaar zijn in een eindige tijd. Dit spreekt helemaal niet vanzelf, maar zonder deze veronderstelling is de aardigheid ervan af. Het tweede belangrijke punt is het volgende. Uit de definitie van een supertaak volgt logisch bekeken meestal niets over de eindtoestand. Er zijn extra aannamen nodig. Alle uitspraken over de toestand om twaalf uur zijn dus gebaseerd op extra aannames.

In de drie pingpongballenvraagstukken is de aanname die door de meeste mensen stilzwijgend wordt gemaakt de volgende: als een bal of een cijfer op een bal op enig tijdstip voor twaalf uur een positie krijgt die tussen dat tijdstip en twaalf uur niet wijzigt, dan heeft die bal of dat cijfer ook om twaalf uur die positie. Ik zal de aanname het simpele continuïteitsprincipe noemen. Met dit simpele continuïteitsprincipe laten zich onze intuïties met betrekking tot de situatie om twaalf uur bij de drie pingpongballenvraagstukken goed verklaren. Daarmee zijn echter niet alle problemen opgelost.

Het algemene continuïteitsprincipe

Binnen de wiskunde kom je wel gedachte-experimenten tegen die op een supertaak neerkomen. Als je bijvoorbeeld informeel uitgaande van de lege verzameling de cumulatieve verzamelingenstructuur in gedachten opbouwt om daarna bijvoorbeeld de axioma's van Zermelo–Fraenkel te formuleren, dan verricht je een soort supertaak. Zie bijvoorbeeld [3]. Meer dan een simpel continuïteitsprincipe – als iets geformeerd is, dan is het er – heb je daarbij niet nodig. Veel van de supertakenproblematiek valt eigenlijk binnen de fysica. (Er is inmiddels een uitgebreide literatuur over supertaken. Zie het artikel van Jon Pérez Laraudogoitia in de Stanford Encyclopedia of Philosophy [8].) Een puur logische benadering lijkt niet erg interessant. Het wordt pas boeiend als je wil weten hoe de werkelijkheid gaat reageren op de uitvoering van zo'n oneindige rij handelingen, aannemend dat die handelingen allemaal kunnen worden uitgevoerd. Het woord 'handeling' wordt hierbij overigens vaak ruim geïnterpreteerd; het gaat er alleen om dat een vorige toestand op de gedefinieerde manier in de volgende toestand overgaat.

We zullen hieronder de pingpongballenvraagstukken kinematisch interpreteren in termen van beweging in een euclidisch vlak. Daarmee zullen we de relatie laten zien met de bekende paradoxen van Zeno, de Dichotomie en Achilles en de Schildpad.

Ondanks het simpele continuïteitsprincipe zullen er lezers zijn die moeite hebben met het informele karakter van de gedachte-experimenten. En dat is niet ten onrechte. De gedachte-experimenten lijken misschien goed gedefinieerd, maar dat is schijn. Uitgaande van het simpele continuïteitsprincipe is dit snel in te zien. Dat principe zegt eigenlijk dat een van de tijd t afhankelijke positiefunctie die vóór twaalf uur constant is, continu is op het moment $t = 12$. Als we de zaak kinematisch interpreteren ligt het erg voor de hand om een algemeen continuïteitsprincipe aan te nemen: positiefuncties van de tijd zijn altijd continu op het moment $t = 12$.

Neem nu PPBV3. We stellen ons de ballen voor als ronde schijfjes in een euclidisch vlak. De positie van het middelpunt van een schijfje bepaalt de positie van de bal. De ton moet dan gezien worden als een puntverzameling in het vlak die minimaal de aftelbaar oneindige rij punten $1, 2, 3, 4, 6, 7$, et cetera bevat.

Bij de uitvoering van PPBV3 wordt bal 1 weldra bal 10, daarna bal 100, et cetera. Terwijl het aantal nullen groeit wordt de bal alsmaar verplaatst en de bal doorloopt daarbij de posities $1, 10^1, 10^2, 10^3$, et cetera.

Het hangt nu heel erg van de definitie van de puntverzameling die de ton voorstelt af welke conclusies we met behulp van het algemene continuïteitsprincipe kunnen trekken. Als de rij van punten $1, 10^1, 10^2, 10^3$, et cetera, convergeert naar een limietpunt P binnen de ton en dat punt heeft als nummer $1\varnothing$, een 1 met aftelbaar oneindig veel nullen erachter, dan moeten we ineens vaststellen dat de ton toch niet leeg is om twaalf uur. Immers, op grond van het algemene continuïteitsprincipe bevindt de bal in kwestie, die eerst nummer 1 droeg, dan 10, vervolgens 100, et cetera, zich om twaalf uur in punt P en dus per definitie in de ton en heeft het nummer $1\varnothing$!

De Dichotomie: de truc van Zeno

Zoals gezegd heeft dit alles iets te maken met de paradoxen van Zeno. Een versie van de Dichotomie van Zeno luidt als volgt. Een beweging van A naar B in een eindige tijd is niet mogelijk omdat eerst het midden van AB, dan het midden van de tweede helft, en vervolgens oneindig vaak het midden van het nog resterende stuk moet worden bereikt. Nota bene: de aanname van het bestaan van al die middens houdt in dat we zowel de tijd als de afstand van A tot B als een continuüm beschouwen. We praten dus over een wiskundig model van de beweging.

Wat Zeno nu deed, is dat relatief onproblematische wiskundig model van de beweging van A naar B problematisch maken door er een supertaak in te projecteren. Het lijkt ineens alsof degene die beweegt in een eindige tijd oneindig veel dingen moet doen. Iemand (Bertrand Russell?) schreef ooit: als degene die beweegt zich bewust zou moeten zijn van alle punten die gepasseerd worden, dan was het inderdaad een onmogelijke opgave; dat is echter helemaal niet nodig.

Achilles en de Schildpad

Dat de kinematisch geïnterpreteerde pingpongballenvraagstukken alles te maken hebben met de paradoxen van Zeno wordt helemaal duidelijk als we Achilles en de Schildpad weer eens laten lopen en wel op een parcours van lengte 2. Achilles start aan het begin en de Schildpad mag halverwege starten. We gaan ervan uit dat Achilles geblesseerd is en vandaag niet erg hard kan lopen. Hij loopt twee maal zo snel als de Schildpad, die 1 lengteeenheid per minuut loopt. De race begint om één minuut voor twaalf. Langs het parcours staan aftelbaar oneindig veel kleine vlaggetjes, genummerd $1, 2, 3, 4$, et cetera. De lopers passeren die vlaggetjes ook in die volgorde. De afstand tot de finish van vlaggetje n noemen we $F(n)$. Er geldt

$$F(n) = 2^{-{}^{10}\log(n)}. \tag{1}$$

Het aardige is nu dat de vlaggetjes zo staan dat als de Schildpad bij vlaggetje 1 is, Achilles nog geen enkel vlaggetje heeft gepasseerd. Als de Schildpad bij vlaggetje 10 is, dan is Achilles bij vlaggetje 1. Als de Schildpad bij vlaggetje 20 is, dan is Achilles bij vlaggetje 2. Als de Schildpad bij vlaggetje 30 is, dan is Achilles bij vlaggetje 3. Algemeen: als de Schildpad bij vlaggetje $10n$ is, dan is Achilles bij vlaggetje n. Dat dit zo is laat zich gemakkelijk inzien. Uit (1) volgt immers

$$F(n) = 2F(10n). \tag{2}$$

Als Achilles bij vlaggetje n is, moet hij nog $F(n)$ afleggen. Omdat hij twee maal sneller loopt dan de Schildpad, moet de Schilpad dan nog $\frac{1}{2}F(n)$ en dat is $F(10n)$.

Als we nu het aantal vlaggetjes dat de Schildpad heeft ontmoet en Achilles nog niet, als de inhoud van de ton interpreteren dan zien we de structuur van PPBV1. Het aantal vlaggetjes tussen Achilles en de Schildpad neemt alsmaar toe, maar als om twaalf uur Achilles en de Schildpad tegelijk de eindstreep bereiken dan is de ton leeg! Zeno zou het vast prachtig hebben gevonden: het feit dat het aantal vlaggetjes tussen de twee lopers alsmaar oploopt en toch plotseling nul is, maakt alleen maar extra duidelijk dat de veronderstelling dat Achilles de Schildpad in zal halen tot absurde conclusies leidt.

Wat kunnen we hiervan leren?

Eric en Rianne, van het stuk uit het juninummer, kwamen tot de conclusie dat het pingpongballenvraagstuk misschien niet zo geschikt is om leerlingen inzicht in het oneindige bij te brengen. Ik ben dat met hen eens. De kans dat je alleen maar verwarring zaait lijkt mij niet gering. Victor en ik hadden ook enige tijd nodig voordat we beter begrepen wat er aan de hand is. We schreven er tenslotte drie artikelen over, zie [1,2,5].

Supertaken zijn intrigerende maar ook glibberige objecten. In het bovenstaande heb ik de pingpongballenvraagstukken minder problematisch gemaakt door ze kinematisch te interpreteren. Daarbij doe ik eigenlijk het omgekeerde van wat Zeno deed: beweging problematisch maken door er supertaken uit te distilleren. Dus: als je het moeilijker wil maken dan gooi je er een supertaak tegenaan. Zeno had een specifiek filosofisch doel met zijn paradoxen. Hij verdedigde de visie van zijn leermeester Parmenides dat de waarheid eeuwig en onveranderlijk is. Beweging is essentieel verandering en kan dus niets met waarheid van doen hebben. Dus: voor de echte waarheidszoeker bestaat beweging niet.

In het onderwijs moeten we oppassen dat we het doel niet uit het oog verliezen. Cantors theorie van de oneindige verzamelingen is een paradijs waarover we heel consistent kunnen praten. Hoe onderhoudend supertaken misschien ook zijn, we moeten oppassen dat ze geen verwarring zaaien.

Het is op zich wel interessant om te zien hoe leerlingen reageren op PPBV1. Een deel van de leerlingen zegt: het wordt nooit twaalf uur! Een ander deel zegt: de vaas bevat oneindig veel ballen. Ik zou zeggen: beide antwoorden goed rekenen! En natuurlijk krijgt ook die enkele leerling die stelt dat de ton leeg is om twaalf uur van mij een mooi cijfer. Het eerste antwoord getuigt van gezond verstand. Zo'n supertaak is in feite niet uitvoerbaar in een minuut. Je kunt er alleen maar zinnig over praten als je de taak ziet als een aftelbaar oneindige rij van overgangen en daarbij abstraheert van de problemen die de feitelijke uitvoering, fysiek of mentaal, met zich mee brengen. Dit laatste vereist enige wiskundige volwassenheid. Het tweede antwoord komt voort uit het inzicht dat het aantal ballen in de ton in de loop van de tijd een rij vormt met limiet oneindig. Dit is ook een prima redenering. Een andere eveneens voortreffelijke redenering leidt tot de conclusie dat de ton leeg is en als je al deze redeneringen overziet, lijkt het antwoord "Ik weet het niet" ook niet onverstandig. Aan de leerlingen ligt het dus niet.

Mamolo en Zazkis schreven een artikel met als titel 'Paradoxes as a window to infinity' [7]. Ik denk dat paradoxen, en zeker paradoxen die supertaken betreffen voorzichtig moeten worden gehanteerd. Als we niet oppassen dan wordt het 'Paradoxes as a window to confusion'.

Dankwoord
Ik dank Nellie Verhoef en Martijn Zaal voor hun commentaar op een eerdere versie van dit stuk.

Referenties

1 V. Allis, T. Koetsier, On some paradoxes of the Infinite, *British Journal Philosophy of Science*, 42, 1991, pp. 187–194.

2 V. Allis, T. Koetsier, On some Paradoxes of the Infinite II, *British Journal Philosophy of Science*, 46, 1995, pp. 235–247.

3 G. Boolos, The iterative conception of set, *The Journal of Philosophy* 68, 1971, pp. 215–231.

4 Eric Cornet, Met de trein van Utrecht naar Ankara: over oneindig gesproken, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/13, juni 2012, pp. 135–136.

5 T. Koetsier, V. Allis, Assaying Supertasks, *Logique & Analyse* 40, 1997, pp. 291–313.

6 J. E. Littlewood, *A Mathematicians's Miscellany*, London, 1953, p. 5 (http://archive.org/details/mathematiciansmi033496mbp).

7 A. Mamolo en R. Zazkis, Paradoxes as a window to infinity, *Research in Mathematics Education* 10, 2008, pp. 167–182.

8 Jon Pérez Laraudagoitia, Supertasks, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 29 June 1999, plato.stanford.edu/entries/spacetime-supertasks.

9 S. Ross, *A First Course in Probability*, New York, 1988, p. 46.